УДК 512.64:372.851

ОБ ОРГАНИЗУЮЩЕЙ РОЛИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ВТУЗА

А.А. Ельцов, Г.А. Ельцова, Л.И. Магазинников

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: vm@tusur.ru, yeltsovaleks@mail.ru

Показана организующая роль линейной алгебры в построении и изучении курса высшей математики технического вуза. Приведён вариант такого подхода, реализованный в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники.

Курс математики в техническом вузе состоит из большого числа самостоятельных дисциплин, поэтому реальна угроза его распада на отдельные, мало связанные между собой разделы, которые можно распределить между разными преподавателями, что порождает проблему преемственности и стыковки разных разделов курса. С другой стороны, это единый курс со своей внутренней структурой и иерархией. Поэтому весьма актуальной является задача построения курса с единых позиций. Идея такого построения высказывалась в [1–3]. В статье приведён опыт построения курса, реализованный в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники.

Системный анализ структуры курса математики показал, что в качестве базового раздела, на основе которого можно построить изложение математики во втузе, может быть выбран курс линейной алгебры. Особое её методологическое значение отмечали многие математики (Г.Е. Шилов [4], Ш. Пизо, М. Заманский [5], М.Р. Куваев [2] и др.).

Возможны различные варианты изложения курса линейной алгебры. Мы предлагаем начинать курс с изучения матриц и их частных случаев вектор-строк и вектор-столбцов. Во-первых, операции над матрицами достаточно формализованы и декларативное их введение как операций над массивами чисел не вызывает трудностей в усвоении данного материала. Во-вторых, матрицы и вектора могут быть использованы в качестве источника примеров при изучении таких структур, как линейные пространства, группы и кольца в самом курсе математики. Кроме того, матричный аппарат ценен сам по себе и имеет многочисленные применения как в курсе математики, так и во многих дисциплинах, использующих математику.

Далее мы переходим к изучению систем линейных уравнений и связанных с ними определителей и понятием ранга матрицы. Векторная форма записи

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} x^2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} x^n = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

системы линейных уравнений позволяет более доходчиво объяснить обычно трудно усваиваемые вопросы о линейной зависимости и линейной независимости систем векторов. Применение матричной формы записи систем линейных уравнений позволяет в компактной форме дать доказательства теоремы Крамера, теоремы о наложении решений систем линейных уравнений и следствий последней теоремы, имеющих большое значение для других линейных объектов: линейных дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений. Матричный аппарат также удобен при изложении теории линейных операторов. С матричного аппарата предлагают начать курс В.А. Ильин и Э.Г. Поздняк [6].

Курс линейной алгебры является единственным формализованным разделом в курсе математики втуза. Поэтому только здесь удаётся дать понятие о математической структуре и кратко изучить некоторые из них. Наиболее подробно изучаются структуры линейного, аффинного и точечно-векторного евклидова пространства, широко применяемые в дальнейшем. Здесь же полезно дать тесно примыкающие к ним понятия метрического, нормированного пространств и пространства со скалярным произведением. Очень удобно изложить векторную алгебру как пример линейного пространства, охарактери-

зовать здесь геометрически понятия линейной зависимости и линейной независимости систем векторов, базиса в линейном пространстве. Мы предлагаем излагать аналитическую геометрию как пример приложения векторной алгебры. При таком подходе изложение аналитической геометрии становиться очень компактным. В связи с сокращением числа аудиторных занятий приходится часть материала выносить на самостоятельное изучение. Наш опыт показал, что векторная алгебра и аналитическая геометрия при описанном выше подходе вполне доступны для самостоятельного изучения, особенно при наличии практимумов (сборников задач с большим количеством разобранных примеров).

Мы убедились, что студентам также доступны основные идеи тензорной алгебры, хотя бы на уровне обозначений. Полезно дать и общее определение тензора. Появление тензорного исчисления в курсе продиктовано необходимостью его использования в некоторых специальных курсах, читаемых студентам.

Разделом, переходным между линейной алгеброй и математическим анализом, является глава, посвящённая линейным и полилинейным отображениям. Мы предлагаем уже в курсе линейной алгебры дать общее понятие функции $f:X\subseteq R^n\to Y\subseteq R^m$, классы функций в зависимости от значений m и n и некоторые другие понятия, (композиция отображений, обратное отображение) традиционно относимые к математическому анализу. Затем наиболее подробно изучаем линейные отображения $L:R^n\to R^m$ – линейные операторы. Здесь доказываем, что суперпозиция (композиция) линейных операторов и отображение, обратное к линейному оператору, являются линейными отображениями. Раздел получается общим для линейной алгебры и математического анализа. Кроме объединяющей роли происходит экономия времени, а также показ места линейных отображений среди других типов отображений. Описанный выше вариант чтения линейной алгебры реализован в [7]. Понятие отображения изложено в [8].

Дифференциальное исчисление начинаем с понятия дифференцируемых функций, как класса функций, допускающих линеаризацию. Одновременно появляются понятия производной матрицы, то есть матрицы соответствующего линейного оператора, и дифференциала, как значение этого линейного оператора на заданном векторе приращений аргументов. Затем подробно изучаем строение производной матрицы для всех наиболее важных случаев. Её элементами являются или производные функции $f:X\subseteq R\to Y\subseteq R$, изучаемые в средней школе, или частные производные, понятие о которых вводится уже на первой лекции по дифференциальному исчислению. Дифференциальное исчисление изложено в [8]. Изложение, подобное предлагаемому, дано в пособии [9], написанном для педагогических вузов. Можно использовать также книги [10, 11], но они доступны лишь людям с высоким уровнем математической культуры.

Очень удобно вводить криволинейные и поверхностные интегралы второго рода как интегралы от скалярного произведения вектор-функции $f(x,y,z)$, заданной на кривой или поверхности, на единичный вектор, соответственно, касательной или нормали к ориентированным кривой L или поверхности S. При этом, для вычисления криволинейного и поверхностного интегралов второго рода в случае задания кривой или поверхности параметрически или, что то же самое, векторно, используются введённые в векторной алгебре скалярное и векторное произведения, т.к. вектор нормали к поверхности $r=r(u,v)$ параллелен векторному произведению $[r'_u,r'_v]$ векторов производных r'_u,r'_v от вектор-функции $r(u,v)$.

При построении теории однородных линейных дифференциальных уравнений и однородных систем линейных дифференциальных уравнений n-го порядка полезно предварительно дать понятия линейных пространств $C[a,b]$ и $C^n[a,b]$ – соответственно непрерывных и непрерывных вместе с производными до порядка n включительно функций заданных на отрезке $[a,b]$. Тогда линейные дифференциальные уравнения порядка n можно записать в виде $Ly=b(x)$, где

$$L=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}:C^n[a,b]\to C[a,b]$$

– линейный дифференциальный оператор, $a_k(x)$, $k=0,1,...,n$, $b(x)$ – непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции и $a_n(x)\neq 0$ для всех x из $[a,b]$. Это позволяет провести аналогию с линейной алгеброй и использовать многие результаты, полученные в ней. Основной в теории однородных линейных дифференциальных уравнений является теорема о том, что множество всех решений уравнения $Ly=0$ образует n-мерное линейное пространство, доказательство которой опирается на теорему существования и единственности, понятие изоморфизма линейных пространств и теорему о том, что изоморфные пространства имеют одинаковую размерность. После этого теорема о структуре общего решения однородного линейного дифференциального уравнения становится простым следствием соответствующей теоремы линейной алгебры. Тот же способ изложения применяется и при изучении однородных систем линейных дифференциальных уравнений. Применение матричной формы записи систем линейных дифференциальных уравнений позволяет более выпукло показать связь с изученными ранее в линейной алгебре понятиями собственных векторов и собственных чисел матриц и линейных операторов. Предлагаемый нами вариант чтения интегрального исчисления и дифференциальных уравнений изложен в учебном пособии [12].

Обобщением задачи о разложении вектора по векторам базиса является задача о представлении функций рядами. Так же как и в [13], мы предлагаем излагать теорию рядов при изучении функций комплексного переменного. Особенно выигрывает и экономит время при этом способе изложения теория степенных рядов и их частного случая – рядов

Тейлора. При этом более выпукло проявляются различия между функциями действительного и комплексного переменного. Интегралы, зависящие от параметра, обобщают теорию рядов, когда индекс суммирования меняется непрерывно.

В теории рядов Фурье происходит обобщение многих понятий конечномерных пространств, изученных в линейной алгебре, на бесконечномерные. Аналогом задачи о собственных числах и собственных векторах симметрического (самосопряжённого) линейного оператора является задача Штурма-Лиувилля о собственных числах и собственных функциях самосопряжённого дифференциального уравнения. В результате решения этой задачи появляются многие ортогональные системы функций, широко применяемые в рядах Фурье. Линейная алгебра и в этих вопросах играет свою объединительную роль. Завершается раздел изложением основных идей теории интегральных преобразований на примере преобразований Фурье и Лапласа. Данный вариант изложения теории функций комплексного переменного и теории рядов реализован в [14, 15].

Таким образом, постоянное использование линейной алгебры позволяет достаточно просто и компактно изложить курс математики технического вуза.

В процессе реализации изложенного выше подхода были или будут написаны практикумы (сборники задач с большим количеством разобранных примеров) по различным частям курса.

По данной методике ведётся преподавание свыше двадцати лет на различных потоках дневных, вечернего и заочного факультетов и в филиалах ТУСУРа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магазинников Л.И. Курс линейной алгебры, его структура, место и значение в общем курсе математики // Вопросы методики преподавания математики в вузе. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1980. – С. 70–76.
2. Куваев М.Р., Магазинников Л.И. О реализации программы курса математики // В сб. научно-методических статей по математике. – М.: Высшая школа, 1983. – Вып. 11. – С. 24–37.
3. Ельцов А.А., Ельцова Г.А., Магазинников Л.И. О структуре курса математики втуза // Международная конференция по математике и механике: Избранные доклады. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2003. – С. 252–256.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). – М.: Наука, 1969. – 432 с.
5. Пизо Ш., Заманский М. Алгебра и анализ. – М.: Наука, 1971. – 656 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
7. Горбанев Н.Н., Ельцов А.А., Магазинников Л.И. Высшая математика I. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001. – 163 с.
8. Ельцов А.А., Ельцова Г.А., Магазинников Л.И. Высшая математика I. Дифференциальное исчисление. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001. – 227 с.
9. Райков Д.А. Многомерный математический анализ: Учеб. пособие для мат. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1989. – 271 с.
10. Ельцов А.А. Высшая математика II. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2001. – 231 с.
11. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. – М.: Наука, 1981. – 544 с. – Ч. 2. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
12. Булдырев В.С., Павлов Б.С. Линейная алгебра и функции многих переменных: Учеб. пособие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 496 с.
13. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы) Ч. I. Общие функциональные ряды и их приложение: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1980. – 279 с., ил.
14. Магазинников Л.И., Глазов Г.Н. Высшая математика. Специальные разделы. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1992. – Ч. I. – 198 с., – Ч. II. – 193 с.
15. Магазинников Л.И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования: Учеб. пособие. – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2002. – 206 с.